Лабораторная работа 5

Решение матричных игр с нулевой суммой сведением к линейной задаче оптимизации

Рассмотрим конечную игру двух лиц с нулевой суммой. Пусть игрок 1 имеет m ходов — $A_1, A_2, ..., A_m$,а игрок 2 (противник) — n ходов $B_1, B_2, ..., B_n$. Если игрок 1 выбрал ход A_i, игрок 2 выбрал B_j, то они получают выигрыш, соответственно: $u_1\left(A_i, B_j\right), u_2\left(A_i, B_j\right)$ причем $u_1\left(A_i, B_j\right) = -u_2\left(A_i, B_j\right) = a_{ij}$ Из элементов a_{ij} можно составить матрицу $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

которая называется платежной- Тогда ходу A_i игрока 1 будет соответствовать выбор им $i-ой$ строки матрицы A, а ходу B_j для игрока 2— $j-ой$ столбца. Цель игрока 1 максимизировать u_1 игрока 2 — максимизировать u_2 (или минимизировать $-u_2$). Игроки выбирают свои ходы не зная какие ходы выберет противник. Считая противника разумным, игроки могут придерживаться осторожных (перестраховочных) стратегий. Игрок 1 в каждой строке находит минимальный элемент $\alpha_i = \min\limits_j \alpha_{ij}, i = \overline{1, m}$, а затем находит свой гарантированный выигрыш $\alpha = \max\limits_i \alpha_i$. Выбор соответствующий строки (строк) будет его максиминной стратегией (при любом поведении игрока 2 он получит не менее α). Аналогично игрок 2 находит $\beta_j = \max\limits_i \alpha_{ij}$ и $\beta = \min\limits_j \beta_j$. Его минимаксной стратегией будет выбор соответствующего столбца (при любом поведении игрока a он обеспечит себе проигрыш не более β).

Если $\alpha = \beta$, то это значит, что существует элемент $\alpha_{i^* j^*}$ который будет минимальным в строке i^* и максимальным в столбце j^*. Тогда стратегии A_{i^*} и B_{j^*} будут оптимальными для игроков 1 и 2. Величина $\gamma = \alpha = \beta$ называется *ценой игры,* а пара ходов (A_{i^*}, B_{j^*}) — *седловой точкой игры.*

Если седловой точки у игры нет и розыгрыши совершаются неоднократно, то естественно для игрока 1 попытаться увеличить а, а для игрока 2 — уменьшить β.

Смешанными стратегиями игроков 1 и 2 будем называть соответственно $p = \left(p_{1,} p_{2,...,} p_m\right)$ и $q = \left(q_{1,} q_{2,...,} q_n\right)$, где $p_i \geq 0, q_j \geq 0$ — вероятности (частоты) применения чистых стратегий A_i и B_j при этом $\sum\limits_{i=1}^{m} p_i = 1, \sum\limits_{j=1}^{n} q_j = 1$.Величина $H\left(p, q\right) = \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} p_i q_j \alpha_{ij}$ — средний выигрыш (математическое ожидание игрока 1).

Основная теорема. Любая матричная игра имеет пару оптимальных смешанных стратегий $p^* = \left(p_i^*\ i = \overline{1,m}\right), q^* = \left(q_j^*\ j = \overline{1,n}\right)$, обладающую свойством:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i q_j^* \alpha_{ij} \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i^* q_j^* \alpha_{ij} \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i^* q_j \alpha_{ij}$$

и цену игры $\gamma = H\left(p^*, q^*\right)$. (То есть если игрок 1 не придерживается p^*, а игрок 2 придерживается q^* тогда он может получить меньше γ. Соответственно для игрока 2.)

Будем считать .что все элементы платежной матрицы неотрицательны (если это не так, то можно ко всем ее элементам прибавить некоторое положительное число L, переводящее платежи в область неотрицательных значений; при этом решение игры p^* и q^* не изменится, цена игры лишь увеличится на L. Тогда $\gamma > 0$

Введем обозначения: $x_i = \dfrac{p_i}{\gamma}, i = \overline{1,m};\quad y_j = \dfrac{q_j}{\gamma},\ j = \overline{1,n};$

Известно, что задача нахождения p^* и q^* сводится к паре взаимодвойственных задач:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \to \min,\quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} x_i \ge 1,\quad x_i \ge 0; i = \overline{1,m} \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_i \to \max,\quad \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} y_i \le 1,\quad y_i \ge 0;\ j = \overline{1,n} \tag{2}$$

Предположим, что мы нашли их решения (оно всегда существует)

$$x_0 = \left(x_i^0, i = \overline{1,m}\right) \quad y_0 = \left(y_j^0,\ j = \overline{1,n}\right)$$

Тогда:

$$\frac{1}{\gamma} = \sum_{i=1}^{m} x_i^0 = \sum_{j=1}^{n} y_j^0; \qquad p_i^* = x_i^0 \gamma, i = \overline{1,m};\quad q_j^* = \gamma y_j^0,\ j = \overline{1,n}$$

Замечание. Задачу (2) удобно решать, применяя симплекс-метод, а задачу (1) — двойственный симплекс-метод. Однако на практике достаточно решить лишь одну из них, например задачу (2). Решение двойственной ей задачи (1) легко получить из последней симплекс-таблицы (см. пример).

Пример. Решить игру, заданную следующей платежной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение.

1. Прежде всего проверим не имеет ли матрица A седловой точки:
$\alpha = \max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = 2;\quad \beta = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = 3.$

Так как $\alpha \ne \beta$, то седловой точки нет и решением игры будет смешанная стратегия, а цена игры заключена в пределах $2 < v < 3$.

2. Решим игру сведением к задаче линейного программирования. Для этого построим пару взаимодвойственных задач по матрице A:

$$\left.\begin{aligned}
&Z = x_1 + x_2 + x_4 \to \min,\\
&2x_1 + 5x_2 + 4x_3 \ge 1,\\
&3x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 1,\\
&4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \ge 1,\\
&x_1 + 3x_2 + 2x_3 \ge 1,\\
&x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,3}
\end{aligned}\right\} \quad (1)
\qquad
\left.\begin{aligned}
&T = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \to \max,\\
&2y_1 + 3y_2 + 4y_3 + y_4 \le 1,\\
&5y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 3y_4 \le 1,\\
&4y_1 + y_2 + 3y_3 + 2y_4 \le 1,\\
&y_i \ge 0, \quad i = \overline{1,4}
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Решим, например, вторую задачу. Чтобы решить эту задачу симплекс-методом, приведем ее к каноническому виду.

$$\left.\begin{aligned}
&T = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \to \max,\\
&2y_1 + 3y_2 + 4y_3 + y_4 + y_5 = 1,\\
&5y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 3y_4 + y_6 = 1,\\
&4y_1 + y_2 + 3y_3 + 2y_4 + y_7 = 1,\\
&y_i \ge 0, \quad i = \overline{1,7}
\end{aligned}\right\}$$

Построим симплекс-таблицы:

	C		1	1	1	1	0	0	0	
$C_Б$	$a_Б$	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	θ
0	a_5	1	2	3	4	1	1	0	0	1/2
0	a_6	1	5	2	2	3	0	1	0	1/5
0	a_7	1	4	1	3	2	0	0	1	1/4
	Δ	0	-1	-1	-1	-1	0	0	0	
	a_5	3/5	0	11/5	16/5	-1/5	1	-2/5	0	3/11
	a_1	1/5	1	2/5	2/5	3/5	0	1/5	0	1/2
	a_7	1/5	0	-3/5	7/5	-2/5	0	1/5	1	---
	Δ	1/5	0	-3/5	-3/5	-2/5	0	1/5	0	
	a_2	3/11	0	1	16/11	-1/11	5/11	-2/11	0	
	a_1	1/11	1	0	-2/11	7/11	-2/11	3/11	0	
	a_7	4/11	0	0	25/11	-5/11	3/11	1/11	1	
	Δ	4/11	0	0	3/11	-5/11	3/11	1/11	0	
	a_2	2/7								
	a_4	1/7								
	a_7	3/7								
	Δ	3/7	5/7	0	1/7	0	1/7	2/7	0	

Оптимальное решение задачи (2): $y^* = \left(0; \frac{2}{7}; 0; \frac{1}{7}; 0; 0; \frac{3}{7}\right), T_{\max} = \frac{3}{7}$. Получим цену игры $\upsilon = \frac{1}{T_{\max}} = \frac{7}{3}$ и компоненты оптимальной смешанной стратегии q_j^* игрока *B*:

$$q_1^* = vy_1^* = \frac{7}{3} * 0 = 0,$$

$$q_2^* = vy_2^* = \frac{7}{3} * \frac{2}{7} = \frac{2}{3},$$

$$q_3^* = vy_3^* = \frac{7}{3} * 0 = 0,$$

$$q_4^* = vy_4^* = \frac{7}{3} * \frac{1}{7} = \frac{1}{3}.$$

Так как базисным переменным y_5, y_6, y_7 задачи (2) соответствуют свободные переменные x_1,x_2,x_3 задачи (1), можем из Δ-строки последней симплекс-таблицы выписать оптимальное решение задачи (1):

$$x_1^* = \frac{1}{7}; x_2^* = \frac{2}{7}; x_3^* = 0; Z_{\min} = \frac{3}{7}$$

Теперь вычислим компоненты оптимального оптимальной смешанной стратегии p_i^* игрока *A:*

$$p_1^* = vx_1^* = \frac{7}{3} * \frac{1}{7} = 0,$$

$$p_2^* = vx_2^* = \frac{7}{3} * \frac{2}{7} = \frac{2}{3},$$

$$p_3^* = vx_3^* = \frac{7}{3} * 0 = 0.$$

Итак, ОТВЕТ: $p^* = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 0\right)$, $q^* = \left(0; \frac{2}{3}; 0; \frac{1}{3}\right)$, $v = 2\frac{1}{2}$.

Задание: Решить игру сведением к задаче линейной оптимизации:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 2). $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 10 \\ 8 & 2 & 6 \\ 10 & 4 & 10 \end{pmatrix}$ 3). $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ 4). $\begin{pmatrix} 8 & 15 & 8 \\ 10 & 13 & 9 \\ 13 & 11 & 17 \end{pmatrix}$

5). $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 5 & 7 & 2 \\ 3 & 9 & 0 \end{pmatrix}$ 6). $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 6 & 4 & 10 \end{pmatrix}$ 7). $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 1 & 6 & 4 \\ 3 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ 8). $\begin{pmatrix} 9 & 8 & 6 \\ 7 & 7 & 8 \\ 6 & 9 & 10 \end{pmatrix}$

9). $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 8 & 9 & 3 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ 10). $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 10 & 5 & 8 \\ 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ 11). $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ 12). $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 8 \\ 7 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

13). $\begin{pmatrix} 15 & 14 & 10 \\ 13 & 10 & 15 \\ 12 & 10 & 14 \end{pmatrix}$ 14). $\begin{pmatrix} 7 & 2 & 9 \\ 1 & 7 & 4 \\ 9 & 3 & 10 \end{pmatrix}$ 15). $\begin{pmatrix} 12 & 15 & 15 \\ 12 & 13 & 14 \\ 17 & 17 & 13 \end{pmatrix}$ 16). $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 7 & 7 & 3 \end{pmatrix}$

17). $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ 18). $\begin{pmatrix} 11 & 10 & 8 \\ 9 & 9 & 10 \\ 8 & 11 & 12 \end{pmatrix}$ 19). $\begin{pmatrix} 2 & 9 & 2 \\ 4 & 7 & 3 \\ 7 & 5 & 11 \end{pmatrix}$ 20). $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 9 \\ 6 & 8 & 3 \\ 4 & 10 & 1 \end{pmatrix}$

21). $\begin{pmatrix} 21 & 20 & 16 \\ 19 & 16 & 21 \\ 18 & 16 & 20 \end{pmatrix}$ 22). $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 10 \\ 8 & 2 & 6 \\ 10 & 4 & 10 \end{pmatrix}$ 23). $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 4 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ 24). $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

25). $\begin{pmatrix} 18 & 17 & 13 \\ 16 & 13 & 18 \\ 15 & 13 & 17 \end{pmatrix}$ 26). $\begin{pmatrix} 14 & 13 & 20 \\ 17 & 19 & 14 \\ 15 & 21 & 12 \end{pmatrix}$ 27). $\begin{pmatrix} 2 & 9 & 2 \\ 4 & 7 & 3 \\ 7 & 5 & 9 \end{pmatrix}$ 28). $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 10 \\ 7 & 9 & 4 \\ 5 & 11 & 2 \end{pmatrix}$

29). $\begin{pmatrix} 11 & 12 & 8 \\ 9 & 11 & 10 \\ 6 & 11 & 12 \end{pmatrix}$ 30). $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 1 & 9 & 8 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

Вопросы к лабораторным работам 5, 6

1. Что такое теория игр,
2. Понятие игры в матричной форме с нулевой суммой,
3. Определение стратегии,
4. Определение оптимальной стратегии,
5. Понятие чистой и смешанной стратегии,
6. Понятие седловой точки, как решается игра, имеющая седловую точку,
7. Принцип minmax и maxmin,
8. Понятие цены игры, нижней цены игры, верхней цены игры,
9. Сведение матричной игры к задаче линейного программирования,
10. Алгоритм метода Брауна-Робинсон,
11. Интерпретация решения задачи.